

## BCP に資する 2 つの地震時復旧曲線

### 1. はじめに

企業を対象とした業務継続ガイドランが内閣府から示され、これを機に製造業における事業継続計画（BCP）への関心が高まった。BCP では、企業自身が最大限受容できる事業停止期間、いわゆる目標復旧期間（RTO ; Recovery Time Objective）を設定し、予想される復旧期間がこれを超えるか否かを見極めることが BCP 策定のスタートとなる。そのためには、大地震発生時にどの程度の可能性で生産活動が停止するのか、どの程度の期間で復旧するのか、を定量的に評価しなければならない。その際、復旧過程を視覚的に把握できる復旧曲線は効果的な情報となる。一方で、復旧曲線には、復旧期間に着目したものと、生産機能の低下に着目したものの 2 つの表記方法がある。

本報では、2 つの復旧曲線の評価方法を具体例とともに解説する。また、BCP への利活用について若干の考察を加える。

### 2. システム信頼性に基づく機能評価の基本

製造業の生産工程は、製造設備やユーティリティなど構成要素（コンポーネント）が直列あるいは並列に連結したシステムとして構成されている。また、地震被害は製造設備やユーティリティのみならず工場建屋にも及ぶ。このため、復旧期間の推計では、工場建屋を一つのコンポーネントとして捉え、これを含めたシステムモデルを構築し、システム機能の低下や停止を確率論的に評価することが求められる。この場合、システム信頼性理論を利用するのが効果的である。

#### 2.1 システム信頼性

図 1 は、直列・並列システム、またこれらが混在したシステムを例示している。図の□はシステムのコンポーネントを示しており、製造設備等の個別の損傷部位に相当する。ここで、システムの機能停止はコンポーネントの物理的損傷によって引き起こされ、コンポーネントが同時に損傷した場合には同時復旧を行い最短で修復が完工するよう配慮されると考える。

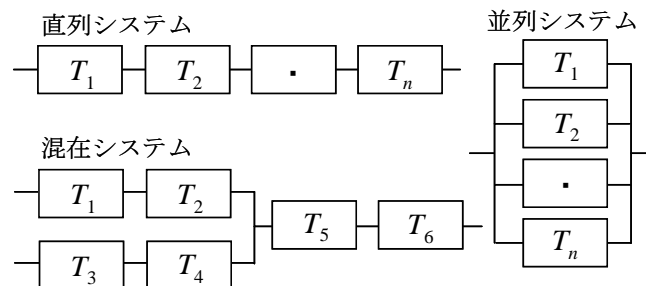


図 1 簡単なシステムの例

この考えに従えば、直列システムの機能停止期間（復旧期間）は地震動  $x$  を条件として次式のように求められる。

$$T_{|x} = \max(T_1, T_2, \dots, T_n | x) \quad (1)$$

ここに、 $T_i$ ,  $i=1\sim n$  はコンポーネントの復旧期間の確率変数であり、地震動  $x$  の条件付である。 $n$  はその総数である。 $T_{|x}$  はシステムの復旧期間の確率変数である。一方、並列システムの場合は次のようになる。

$$T_{|x} = \min(T_1, T_2, \dots, T_n | x) \quad (2)$$

(1)式中の  $\max( )$  は、それぞれの確率変数（復旧期間）の組み合わせの最大値が選択され、(2)式中の  $\min( )$  は最小値が選択されるという意味である。それぞれ極値の確率分布の教えるところにより復旧期間の非超過確率関数  $F_T(t)$  はコンポーネントの損傷事象の独立を前提に、直列システム ((1)式) の場合は以下となる。

$$F_T(t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_n \leq t | x) \quad (3)$$

$$F_T(t) = \prod_{i=1}^n F_{T_i}(t) \quad (4)$$

ここに、 $F_{T_i}(t)$ ,  $i=1\sim n$  は、コンポーネントの地震動  $x$  の条件付復旧期間の確率関数である。並列システム ((2)式) の場合は以下のようになる

$$1 - F_T(t) = P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t | x) \quad (5)$$

$$F_T(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{T_i}(t)) \quad (6)$$

直列と並列システムが混在するシステムにも拡張でき、図 1 に示す混在システムでは以下のようになる。

$$T_{|x} = \max\{\min(\max(T_1, T_2 | x), \max(T_3, T_4 | x)), T_5, T_6 | x\} \quad (7)$$

非超過確率関数にて表現すると以下のようになる。

$$F_T(t) = \{1 - (1 - F_{T_1}(t) \cdot F_{T_2}(t))(1 - F_{T_3}(t) \cdot F_{T_4}(t))\} \cdot F_{T_5}(t) \cdot F_{T_6}(t) \quad (8)$$

これより、システム機能の復旧期間は、システムを構成するコンポーネントの復旧期間の非超過確率関数の積和によって求められことになる。

## 2.2 最小パス集合

図 1 に示したシステム例は、システムとしては極めて単純である。実際のシステムは、直列・並列が複雑に混在したり、ネットワークシステムであったり、システム途中にブリッジがあったり、さらに網目状のものもある。このような複雑なシステムになると、(8)式は大変複雑になり、ケースによって解析できない場合もある。このような複雑なシステムを対象とするには、一定のアルゴリズムに則った単純化された計算過程が必要になる。そこで、最小パス集合 (MPS ; Minimum Pass Set) を利用する。これより複雑なシステムであっても比較的容易に復旧期間を求めることができる。MPS を概説すると、まずシステム構成から最小の経路を検索し、それぞれの経路毎にコンポーネントの確率積 (理論積) を求めた上でそれぞれを確率和 (理論和) する、となる。図 2 に示す、始点がコンポーネント 1、終点がコンポーネント 6 の直列・並列混在システムの例を使い、具体的に説明しよう。

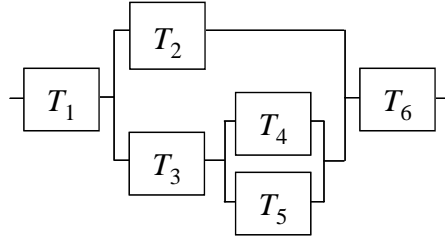


図2 直列・並列混在システムの例

最初に、(8)式に則って定式化すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 F_{TA}(t) &= 1 - (1 - F_{T4}(t))(1 - F_{T5}(t)) \\
 F_{TB}(t) &= F_{T3}(t) \cdot F_{TA}(t) \\
 F_{TC}(t) &= 1 - (1 - F_{T2}(t))(1 - F_{TB}(t))
 \end{aligned} \tag{9}$$

ここに、 $F_{TA}(t)$  はコンポーネント4と5の並列システムの復旧期間の非超過確率関数を、 $F_{TB}(t)$  はコンポーネント3と4,5の直列システムのそれである。 $F_{TC}(t)$  はコンポーネント2と3,4,5の並列システムのそれである。最終的にシステムの復旧期間の非超過確率関数は、以下のようになる。

$$F_T(t) = F_{T1}(t) \cdot F_{TC}(t) \cdot F_{T6}(t) \tag{10}$$

(10)式を展開すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 F_T(t) &= F_{T126}(t) + F_{T1346}(t) + F_{T1356}(t) - F_{T13456}(t) - F_{T12346}(t) - F_{T12356}(t) \\
 &\quad + F_{T123456}(t)
 \end{aligned} \tag{11}$$

式を簡略に示すため

$$F_{T126}(t) = F_{T1}(t) \cdot F_{T2}(t) \cdot F_{T6}(t) \tag{12}$$

と表記しているので注意する。他も同様とする。ここで、(10)式はシステムが複雑になるとかなり面倒であることに気付く。

さて、MPSによる方法について、順を追って説明しよう。始点1から終点6までの経路を検索するとT1-T2-T6、T1-T3-T4-T6、T1-T3-T5-T6の3通りの直列システムを抽出できる。これを図3に示す。3経路はそれぞれ直列であり(4)式を適用できる。その結果、各経路の復旧期間の非超過確率関数は次のようになる。

$$F_{T1}(t) \cdot F_{T2}(t) \cdot F_{T6}(t)、F_{T1}(t) \cdot F_{T3}(t) \cdot F_{T4}(t) \cdot F_{T6}(t)、F_{T1}(t) \cdot F_{T3}(t) \cdot F_{T5}(t) \cdot F_{T6}(t) \tag{13}$$

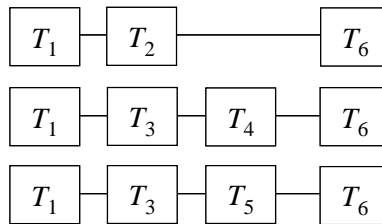


図3 始点から終点までのシステム経路

次に、これらが並列に存在すると考え、(6)式に従い確率和する。式で表すと以下のようなになる。

$$F_T'(t) = 1 - (1 - F_{T126}(t))(1 - F_{T1246}(t))(1 - F_{T1356}(t)) \quad (14)$$

(14)式を展開すると、以下のようなになる。

$$F_T'(t) = F_{T126}(t) + F_{T1346}(t) + F_{T1356}(t) - F_{T1123466}(t) - F_{T1123566}(t) - F_{T11334566}(t) + F_{T11123345666}(t) \quad (15)$$

さらに、同じコンポーネントの高次の項を1次に置き換える。例えば、 $F_{T666}(t)$ は $F_{T6}(t)$ とする。最終的には以下となる。

$$F_T'(t) = F_{T126}(t) + F_{T1346}(t) + F_{T1356}(t) - F_{T12346}(t) - F_{T12356}(t) - F_{T13456}(t) + F_{T123456}(t) \quad (16)$$

(16)式は(11)式と一致する。MPSは、高次項を1次に置き換える手間はああるものの、一定のアルゴリズムを持つことから、複雑なシステムの計算に適している。

### 3. 例題としての生産システム

図4に生産工程のシステムモデルの例を示す。この工場は5種の製品を生産しており、それぞれの生産比率（売り上げ比率）は0.05~0.35である。この生産システムの始点は入荷した材料の検査工程であり、コンポーネントT1である。終点は梱包、出荷でありコンポーネントT10である。なお、便宜上工場建屋ならびにユーティリティ等は含めていない。

図4のシステムモデルより、5製品の生産経路は図5に示す5通りとなる。図5より、製品毎に直列のシステムとして分解でき、これより、前記したシステム信頼性手法を利用することができる。例えば、製品Aの場合は以下のようなになる。

$$F_T(t) = F_{T1}(t) \cdot F_{T2}(t) \cdot F_{T5}(t) \cdot F_{T7}(t) \cdot F_{T10}(t) \quad (17)$$

つまり、コンポーネントT1, T2, T5, T7, T10それぞれの復旧期間（地震動の条件付）の確率関数を与えれば、製品Aの復旧期間の確率関数は求められる。

ここで、各コンポーネントの復旧期間の確率関数を表1にまとめて示す。この表はコンポーネントの損傷確率と損傷した場合の復旧期間を表している。例えば1列目（コンポーネントT1）では、停止しない確率は0.8、復旧に10日程度要する損傷の発生確率は0.15、復旧に20日程度要する損傷の発生確率は0.05、などである。損傷確率は地震動を条件としたFragility Curveなどによって求められる。また、復旧期間は製造設備を再調達するのに要する期間や修理を行うのに要する期間などである。

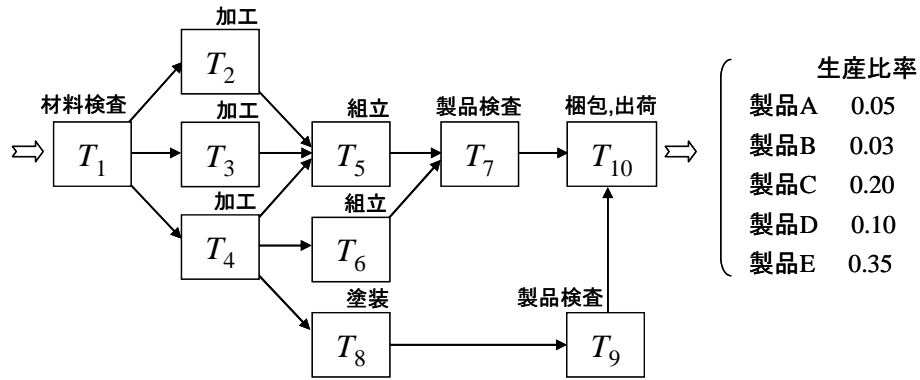


図4 生産工程のシステムモデルの例

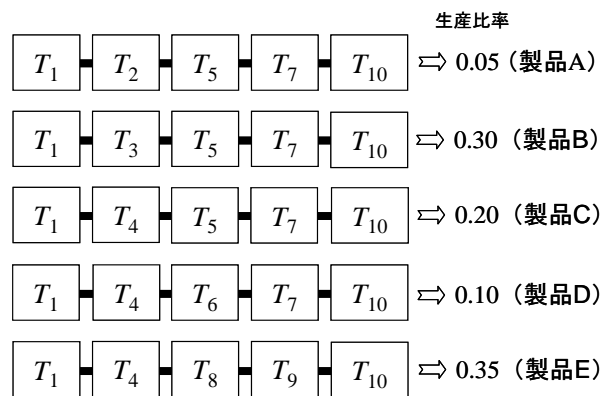


図5 システムの経路と生産比率

表1 各コンポーネントの復旧期間の確率関数

復旧日数	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
0	0.8	0.7	0.6	0.6	0.9	0.8	0.9	0.5	0.95	0.9
5	0	0	0.3	0	0	0	0	0	0.05	0.1
10	0.15	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0
15	0	0.2	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0
20	0.05	0	0	0	0	0.2	0.08	0	0	0
25	0	0	0	0.2	0	0	0	0.4	0	0
30	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0.02	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0

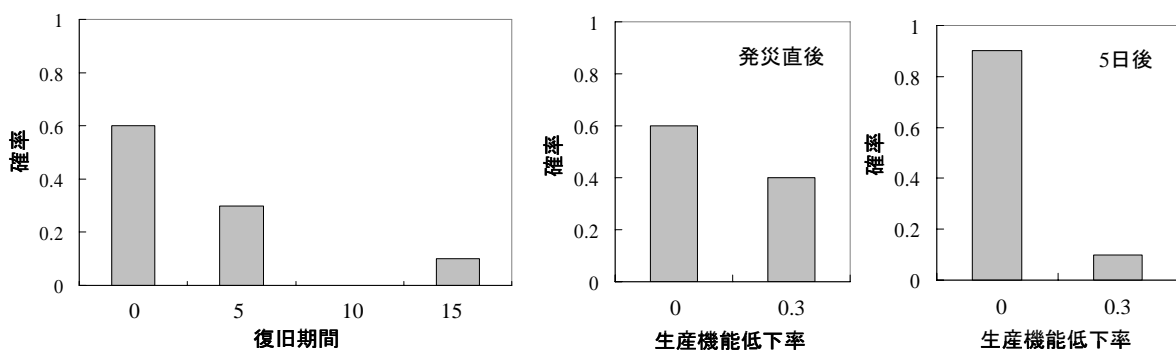
#### 4. 2つの復旧曲線の評価方法

表1から、確率関数は2つの可測軸を持つことに気付く。一つは復旧期間の確率関数、もう一つは生産機能低下率の確率関数である。コンポーネントT3を取り上げ、2つの可測軸による確率関数を図6に例示する。まず、復旧期間の確率関数は表1からそのまま読み取ることができる。生産機能低下率の確率関数は、コンポーネントT3は製品Bの生産にのみ関与しており、このコンポーネントが損傷す

ると、生活活動は少なくとも全体の 0.3 低下することになる。発災直後においては、健全である確率は 0.6、生産機能が停止する状態確率はその余事象として 0.4 となる。ところが、発災から 5 日経過すると、復旧が進むため今度は健全である確率は 0.9 (0.6+0.3) に上昇し、生産機能が停止する状態確率は 0.1 に低下する。さらに発災から 15 日経過すると、完全復旧するため健全である確率は 1.0 となる。このように、経過時間 (復旧期間) と共に生産機能低下は Dynamic に変化していく。

可測軸は、損傷確率に対し 2 つあり、これより、復旧曲線は 2 つの表記方法が存在することになる。復旧期間を可測軸とした復旧曲線を T 曲線、生産機能の低下率を可測軸とした復旧曲線を D 曲線と呼ぶことにする。以下では、それぞれの計算方法を、順を追って説明しよう。

まず、(17)式の計算を実行するため、表 1 の確率関数を非超過確率関数に置き換えよう。これを表 2 に示す。



(a) 復旧期間確率関数 (b) 生産機能低下率確率関数

図 6 コンポーネント T3 の復旧期間と生産機能低下率の確率関数

表 2 コンポーネントの復旧期間の非超過確率関数 ( $F_{Ti}(t), i=1\sim 10$ )

復旧日数	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
0	0.8	0.7	0.6	0.6	0.9	0.8	0.9	0.5	0.95	0.9
5	0.8	0.7	0.9	0.6	0.9	0.8	0.9	0.5	1	1
10	0.95	0.7	0.9	0.8	0.9	0.8	0.9	0.5	1	1
15	0.95	0.9	1	0.8	1	0.8	0.9	0.5	1	1
20	1	0.9	1	0.8	1	1	0.98	0.5	1	1
25	1	0.9	1	1	1	1	0.98	0.9	1	1
30	1	1	1	1	1	1	0.98	0.9	1	1
35	1	1	1	1	1	1	1	0.9	1	1
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

各製品の生産経路 (5 経路) 毎に(17)式の計算を行う。ここで製品 A の生産経路を例として取り上げ、これを表 3 に示す。

表 3 の非超過確率は(17)式の  $F_T(t)$  である。また、表中の確率は左の復旧期間となる確率を示しており、これが製品 A の復旧期間の確率関数である。これは、製品 A の生産比率 0.05 を条件としたもので  $P_T(t | r_i)$  と書ける。ここに、 $t$  は復旧期間、 $r_i$  は製品  $i$  (ここでは製品 A) の生産比率である。期待復旧期間は確率に復旧期間を乗じ総和したもの、つまり  $P_T(t | r_i)$  の期待値である。製品 A は 10.43 日と計算できる。これは製品 A が生産活動を再開できまでに要する平均日数、すなわち復旧期間の平均値であ

表 3 製品 A の復旧期間の確率関数と期待復旧期間

復旧日数	T1	T2	T5	T7	T10	非超過確率	確率	期待復旧期間(日)
0	0.8	0.7	0.9	0.9	0.9	0.408	0.408	0.000
5	0.8	0.7	0.9	0.9	1	0.454	0.045	0.227
10	0.95	0.7	0.9	0.9	1	0.539	0.085	0.851
15	0.95	0.9	1	0.9	1	0.770	0.231	3.463
20	1	0.9	1	0.98	1	0.882	0.113	2.250
25	1	0.9	1	0.98	1	0.882	0.000	0.000
30	1	1	1	0.98	1	0.980	0.098	2.940
35	1	1	1	1	1	1.000	0.020	0.700
40	1	1	1	1	1	1.000	0.000	0.000
								10.430

る。他の製品 (B~E) も同様に計算する。ここまでの計算は T 曲線、D 曲線共に共通している。

#### 4.1 T 曲線

製品毎に計算された期待復旧期間を短い順に並べ替え、まとめたものを表 4 に示す。この表から次の事項を読むことができる。7.897 日までは生産機能は完全に停止しているが、7.897 日を越えると、生産比率 0.3 は回復する。また、10.43 日を越えると生産比率 0.35 (0.3+0.05) まで回復する。この後も同様の考え方に基づき回復し、18.474 日後には生産機能は完全に回復する。この過程を横軸に復旧期間、縦軸に生産比率の累積を採ったグラフに描画すると、T 曲線を描くことができる。図 7 の黒線がそれである。T 曲線を式で表記すると以下のようなになる。

$$R_T(r_{Ci}) = \int_0^{\infty} t \cdot P_T(t | r_{Ci}) dt \quad (18)$$

ここに、 $R_T(r_{Ci})$  は復旧の T 曲線、 $r_{Ci}$  は生産比率の累積である。 $P_T(t | r_{Ci})$  は生産比率の累積を条件とした復旧期間の確率関数である。

表 4 製品毎の期待復旧期間

製品	生産比率	生産比率の累積	期待復旧期間(日)
B	0.30	0.30	7.897
A	0.05	0.35	10.430
C	0.20	0.55	11.088
D	0.10	0.65	12.525
E	0.35	1.00	18.474

#### 4.2 D 曲線

表 3 の非超過確率に着目しよう。一行目 (復旧期間 0 日) の非超過確率は、発災直後に少なくとも製品 A は生産できる確率 (0.408) を示している。この余事象は生産機能が停止する状態確率であり、0.592 となる。2 行目 (復旧期間 5 日) のそれは、5 日で復旧するコンポーネントは既に機能を回復しており、これを考慮した製品 A の生産できる確率 (0.454) を示している。この余事象は 5 日経過した時点でも生産機能は停止している状態確率であり、0.546 となる。このように経過時間に対し各製品が生産できない確率、つまり生産機能喪失確率を表 3 から拾い上げ、製品種と経過時間に対してまとめ

たものを表 5 に示す。

表 5 の一行目（製品 A）を見ると、表 3 の非超過確率を超過確率に置き換えたものであることに気付く。この超過関数は生産比率を条件とした復旧期間の確率関数  $P_T(t/r_i)$  より、以下のように求まる。

$$G_T(t|r_i) = \int_t^{\infty} P_T(\tau|r_i) d\tau = 1 - \int_0^t P_T(\tau|r_i) d\tau \quad (19)$$

次に、表 5 の生産機能低下率期待値は、各製品の生産機能低下率にそれぞれの確率を乗じ総和したものである。横軸に復旧期間、縦軸に生産機能低下率期待値を採ると、D 曲線を描くことができる。図 7 の灰色線がそれである。D 曲線を式で表すと以下ようになる。

$$R_D(t) = 1 - \sum_{all\ i} r_i \cdot G_T(t|r_i) \quad (20)$$

ここに、 $R_D(t)$  は復旧の D 曲線、 $r_i$  は生産比率である。 $G(t/r_i)$  は各製品が経過時間（日数） $t$  までに復旧しない確率、つまり復旧期間の超過確率を表している。

表 5 生産機能喪失の超過確率と生産機能低下率期待値

製品(生産比率)	経過時間(復旧日数)									
	~5	~10	~15	~20	~25	~30	~35	~40	~45	
A (0.05)	0.592	0.546	0.461	0.231	0.118	0.118	0.020	0.000	0.000	
B (0.3)	0.650	0.417	0.307	0.145	0.020	0.020	0.020	0.000	0.000	
C (0.2)	0.650	0.611	0.384	0.316	0.216	0.020	0.020	0.000	0.000	
D (0.1)	0.689	0.654	0.453	0.453	0.216	0.020	0.020	0.000	0.000	
E (0.35)	0.795	0.760	0.620	0.620	0.600	0.100	0.100	0.100	0.000	
生産機能 低下率期待値	0.702	0.606	0.454	0.381	0.287	0.053	0.048	0.035	0.000	

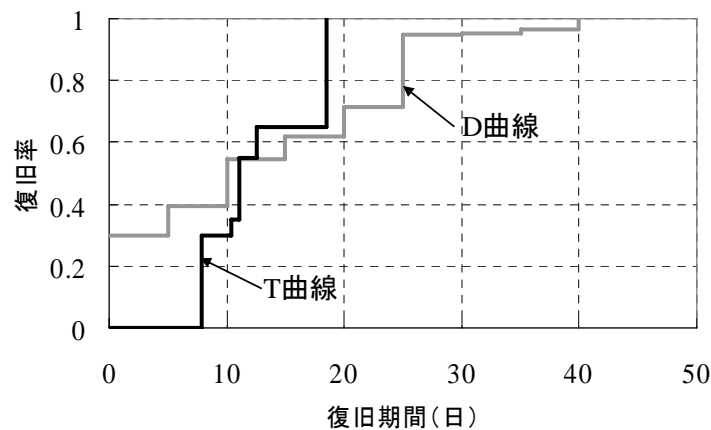


図 7 二つの復旧曲線

#### 4.3 復旧期間の期待値

復旧期間の期待値は、図 8 に示すように復旧曲線の左側面積によって求められる。まず、T 曲線の復旧期間の期待値は以下のように求められる。



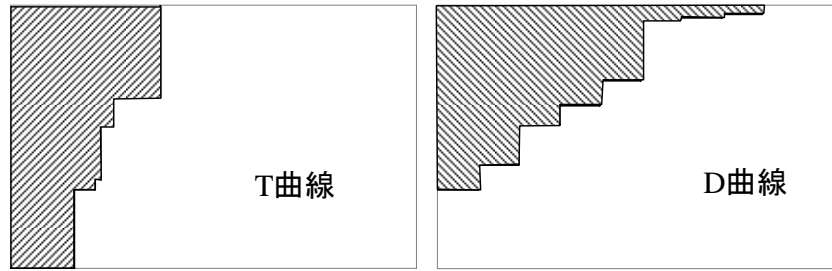


図 8 復旧期間の期待値

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \sum_{all\ i} r_i \cdot R_T(r_i) \\
 &= \sum_{all\ i} r_i \cdot \int_0^{\infty} t \cdot P_T(t | r_i) dt \\
 &= \sum_{all\ i} r_i \cdot \int_0^{\infty} G_T(t | r_i) dt
 \end{aligned} \tag{21}$$

一方、D 曲線の復旧期間の期待値は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
 E(D) &= \int_0^{\infty} \{1 - R_D(t)\} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \sum_{all\ i} r_i \cdot G_T(t | r_i) dt \\
 &= \sum_{all\ i} r_i \cdot \int_0^{\infty} G_T(t | r_i) dt
 \end{aligned} \tag{22}$$

以上より、T 曲線と D 曲線の復旧期間の期待値は一致する。本例では 12.83 日と計算される。

## 5. 2つの復旧曲線の利活用

図 9 は、生産機能低下率×復旧期間×確率を 3D に描画したものである。図より、経過時間と共に、生産機能低下率 0 の確率が 1.0 に収束しているのが分かる。生産機能低下率から見てその平均値を復旧期間に対し描くと D 曲線が書ける。

さて、上水道や送電系統、道路ネットワークなどを対象とした場合には、復旧曲線は D 曲線ならびに図 9 が多く用いられる。ところが、どの製品は何日で復旧するのか、などの情報は復旧率に着目した D 曲線からは見ることはできない。製造業を対象とした BCP では、主要業務や重要な製造ラインの復旧期間を知ることが重要となる。この場合、復旧期間に着目した T 曲線の方が利用性は高いと考える。基本的には、対象施設や評価目的等を勘案し、使い分けが必要であろう。

一方、本手法はコンポーネントが同時に損傷した場合には同時復旧を行い最短で修復が完工するよう配慮される、いわゆる同時復旧を前提としている。しかしながら、復旧工事の工程編成、資材や設備機器の調達、人不足など、復旧工事は必ずしも同時に進められるわけではない。この場合、(17)式は適用できない。

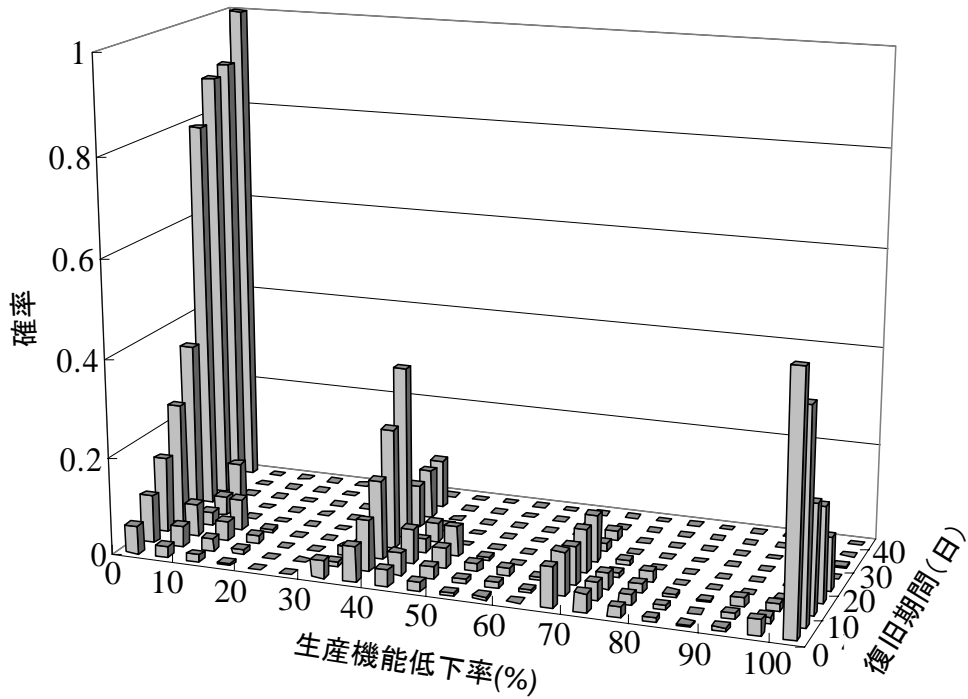


図9 復旧過程の確率関数

## 6. おわりに

BCP 策定において、復旧曲線は説明生が高く有益な情報となる。ところが、復旧曲線には、復旧期間に着目したものと、生産機能の低下に着目したものの2つの表記方法がある。

本報は、2つの復旧曲線の評価方法を、具体例を使い説明し、それぞれの特徴と共通点を示した。基本的には、対象施設や評価目的等を勘案し、使い分けが必要であるが、主要業務や特定の製造ラインの復旧期間の把握を目的とするBCPでは、復旧期間に着目した復旧曲線の方が利用性は高いと考える。なお、2つの復旧曲線の形状はかなり異なるため、双方を同時に示すと非説明者は異質なものと受け止める可能性がある。その場合混乱を招くものと考えられ、注意が必要である。